# Introduction aux systèmes dynamiques

Céline Casenave

## Contents

# 1 Modèles considérés

On considère un système de la forme très générale[1]:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{x} & = & f(x(t),t), & \forall t \in ]t_0, \infty[, \\ x(t_0) & = & x_0, & t_0 \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \tag{1}$$

- $t$ est la variable temporelle.
- $x$ est la variable d'état du système, qui dépend de $t$. C'est elle qui permet de décrire l'état du système auquel on s'intéresse au cours du temps. On la supposera ici à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: $\forall t$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Dans la suite, on notera $x_i$, $i = 1 : n$ les $n$ composantes scalaires de $x$:

$$x(t) = (x_1(t),\, x_2(t),\, \ldots,\, x_n(t))^T. \tag{2}$$

- $t_0$ est l'instant initial, c'est à dire le temps à partir duquel on s'intéresse à l'évolution de $x(t)$.
- $x_0$ est la condition initiale, c'est à dire la valeur prise par $x(t)$ à l'instant initial $t_0$.
- $f$ est la fonction du second membre de l'équation. On la supposera continue de $\mathbb{R}^n \times ]t_0, \infty[$ dans $\mathbb{R}^n$. On notera dans la suite:

$$f(x,t) = (f_1(x,t),\, f_2(x,t),\, \ldots,\, f_n(x,t))^T. \tag{3}$$

**Remarque 1** *Lorsque la fonction $f$ ne dépend que d'une variable, c'est à dire lorsque l'on a $\dot{x} = f(x(t))$, on dit que le système est* ***autonome****. Lorsqu'il y a en plus dépendance par rapport à $t$, on parle de système* ***non autonome****.*

On appellera dans la suite **trajectoire solution** de (1), toute fonction $t \mapsto x(t)$ solution de (1).

On supposera que le système est bien posé, c'est à dire qu'à une condition initiale donnée $x_0$, il existe une et une seule trajectoire solution de (1).

L'objectif de ce cours est d'étudier l'allure des trajectoires solution de (1), pour comprendre comment le système se comporte en fonction de la valeur de la condition initiale.

# 2 Points d'équilibre

Certains points de l'espace $\mathbb{R}^n$ jouent un rôle particulier pour les systèmes dynamiques: ce sont **les points d'équilibre**, dont le détermination constitue souvent la première étape de l'étude d'un système dynamique.

[1] $\dot{x}$ représente la dérivée de $x$ par rapport au temps $t$, aussi notée $\frac{dx}{dt}$.

**Définition 2** ***Point d'équilibre:***

- ***cas non autonome:*** *$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système $\dot{x} = f(x,t)$ si $\exists t_e \geqslant t_0$ tel que:*
$$f(\bar{x},t) = 0, \, \forall t \geqslant t_e. \tag{4}$$

- ***cas autonome:*** *$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système $\dot{x} = f(x)$ si:*
$$f(\bar{x}) = 0. \tag{5}$$

Selon la définition donnée ci-dessus, les points d'équilibre sont des points de l'espace en lesquels la dérivée de $x$ s'annule. En effet, soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de (1), alors:

$$x(t_e) = \bar{x} \Longrightarrow \dot{x}(t) = 0, \, \forall t \geqslant t_e. \tag{6}$$

Par conséquent, si une trajectoire arrive en ce point, elle y reste nécessairement.

**Terminologie**: les points d'équilibre sont aussi parfois appelés **points fixes** ou bien encore **points stationnaires**.

Une fois les points d'équilibre déterminés, plusieurs questions se posent: Y-a-t-il des trajectoires solution qui mènent à ces points d'équilibre? Comment se comportent les trajectoires au voisinage des points d'équilibre?

# 3 Définition de la notion de stabilité

Lorsqu'on souhaite étudier le comportement des trajectoires solution autour d'un point d'équilibre, on s'intéresse d'abord à **la stabilité du point d'équilibre**, qui, comme nous le verrons dans la suite, est une notion assez intuitive.

Le modèle mathématique du système que l'on étudie nous dit que, si une trajectoire passe par un point d'équilibre, elle y reste, puisque la vitesse $\dot{x}$ est alors nulle. Dans la réalité cependant, il y a toujours des petites perturbations qui font que le système ne reste pas exactement en ce point. Prenons l'exemple d'un pendule: on imagine que l'on accroche une masse au bout d'une tige, supposée rigide, et que l'on accroche l'autre bout de la tige à un clou planté dans un mur: on note $\theta$ l'angle que fait la tige avec la verticale (voir figure 1). Un point d'équilibre évident de ce système est atteint lorsque la tige est à la verticale, la masse étant en bas: cela correspond au cas où l'angle $\theta$ vaut 0, et lorsque la vitesse de rotation du pendule est nulle (i.e. $\dot{\theta} = 0$). Imaginons que le pendule soit à cet état d'équilibre. Un peu de vent peut venir perturber le système, qui s'écartera alors légèrement de ce point d'équilibre (i.e. $\theta = \epsilon_1$ et $\dot{theta} = \epsilon_2$). La question est maintenant de savoir, si le système va revenir ou non à ce point d'équilibre. Dans le cas du pendule, et de ce point d'équilibre, la réponse est intuitive: oui, le système va revenir à cet état d'équilibre, en oscillant, les oscillations s'amortissant au fil du temps. On dit alors que le point d'équilibre est **stable**.

Le pendule possède cependant un second point d'équilibre auquel on ne pense pas toujours: il correspond au cas où la vitesse de rotation est nulle: $\dot{\theta} = 0$, et où $\theta = 180°$, c'est à dire lorsque la tige est à la verticale, mais la masse est "au dessus" du clou. En effet, à ce point là, si il n'y a aucune perturbation, la dérivée $\dot{x}$ est aussi nulle: les forces (poids et tension de la tige) se compensent parfaitement. Cependant, à la moindre perturbation (coup de vent par exemple), les forces ne s'équilibreront plus et le poids de la masse entrainera le système et l'éloignera de ce point d'équilibre, dont on dit qu'il est **instable**.

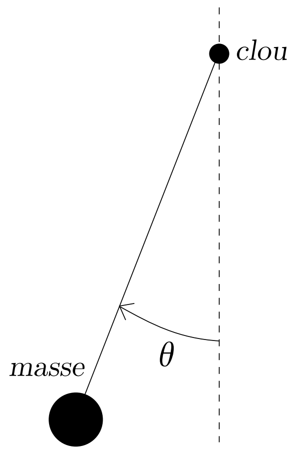


Figure 1: Schéma d'un pendule.

Une définition mathématique de cette notion est donnée en suivant: c'est la stabilité au sens de Lyapunov. On se placera ici dans le cas d'un système autonome.

**Définition 3** ***Point d'équilibre stable (au sens de Lyapunov)***

1. *Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système:*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{x} & = & f(x(t)), & \forall t \in ]t_0, \infty[, \\ x(t_0) & = & x_0, & t_0 \in \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \tag{7}$$

   *est dit **stable** si:*

   - $f(\bar{x}) = 0$
   - *et si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que:*

$$||x_0 - \bar{x}|| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t, x_0) - \bar{x}|| \leqslant \varepsilon, \forall t \geqslant t_0, \tag{8}$$

     *où $x(t, x_0)$ est la solution du système (7) à l'instant $t$.*

2. *Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système (7) est dit **instable** si il n'est pas stable.*

**Remarque 4** *La définition d'un point d'équilibre instable peut également être donnée en utilisant des quantitifcateurs, comme pour le point d'équilibre stable, en prenant la contraposée. On a alors:*
*Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système (7) est dit **instable** si:*

- $f(\bar{x}) = 0$
- *et si* $\exists \varepsilon > 0$ *tel que,* $\forall \delta > 0$*:*

$$||x_0 - \bar{x}|| \leqslant \delta \Rightarrow \exists T \geqslant t_0 \text{ tel que } ||x(t, x_0) - \bar{x}|| > \varepsilon, \forall t > T, \quad (9)$$

*où* $x(t, x_0)$ *est la solution du système (7) à l'instant* $t$*.*

D'après la définition précédente, lorsqu'un point d'équilibre $\bar{x}$ d'un système est stable au sens de Lyapunov, on est assuré que si l'on est suffisamment proche de ce point d'équilibre, on va le rester. Cependant, rien ne nous dit que la trajectoire solution va tendre ou pas vers ce point d'équilibre: elle pourrait très bien rester proche sans jamais converger vers la valeur. Elle pourrait par exemple osciller.

Pour compléter la définition donnée précédemment, on introduit maintenant la notion d'**équilibre asymptotiquement stable**.

**Définition 5** ***Point d'équilibre asymptotiquement stable (au sens de Lyapunov)***

*Un point d'équilibre* $\bar{x}$ *du système (7) est dit* ***asymptotiquement stable*** *(A.S.) si:*

- *il est stable,*
- *et si* $\exists \delta > 0$ *tel que:*

$$||x_0 - \bar{x}|| \leqslant \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x} \Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} ||x(t) - \bar{x}|| = 0. \quad (10)$$

*On appelle* ***bassin d'attraction*** *du point d'équilibre* $\bar{x}$ *l'ensemble des valeurs de* $x_0$ *à partir desquelles la trajectoire solution va converger vers le point d'équilibre* $\bar{x}$*.*

Avec cette notion de stabilité asymptotique, on est maintenant assuré que, au moins dans un voisinage du point d'équilibre, les trajectoires vont converger vers le point d'équilibre. On peut maintenant se demander à quelle vitesse aura lieu la convergence.

Pour répondre à cette question, on introduit la notion de **stabilité exponentielle**.

**Définition 6** ***Point d'équilibre exponentiellement stable (au sens de Lyapunov)***

*Un point d'équilibre* $\bar{x}$ *du système (7) est dit* ***exponentiellement stable*** *(E.S.) si:*

- *il est stable,*
- *et si* $\exists\, \delta, \alpha, \beta > 0$ *tels que:*

$$||x_0 - \bar{x}|| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t) - \bar{x}|| \leqslant \alpha ||x_0 - \bar{x}|| e^{-\beta t}, \forall t \geqslant t_0. \quad (11)$$

**Remarque 7**
- *un point d'équilibre E.S. est nécessairement A.S.*
- *le contraire est faux: un point d'équilibre A.S. n'est pas nécessairement E.S.*

La notion de stabilité exponentielle permet de caractériser la vitesse de convergence. Au voisinage d'un point d'équilibre E.S., on sait non seulement que les trajectoires vont converger vers l'équilibre, mais en plus qu'elle vont le faire à une vitesse exponentielle.

Les trois définitions de stabilité données jusqu'ici (stabilité, stabilité asymptotique, stabilité exponentielle) sont des définitions "locales": c'est à dire qu'elles ne permettent de définir le comportement des trajectoires que dans un voisinage du point d'équilibre. Une définition de **stabilité globale** est donnée ci-dessous:

**Définition 8** ***Point d'équilibre globalement stable (au sens de Lyapunov)***

*Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système (7) est dit **globalement asymptotiquement stable** (G.A.S.) (respectivement **globalement exponentiellement stable** (G.E.S.)) si il est A.S. (respectivement E.S.) quelle que soit la condition initiale $x_0$. On dit aussi qu'il est A.S. (respectivement E.S.) au sens large.*

La question que l'on se pose maintenant est de savoir comment on vérifie en pratique qu'un point d'équilibre est stable ou non? et si il est possible, par l'étude de la stabilité des points d'équilibre, de prévoir le comportement des trajectoires ?

# 4 Critères de stabilité locale

Dans ce paragraphe, on va chercher des critères pratiques simples pour vérifier si un point d'équilibre est stable ou pas.

## 4.1 Préliminaires

Avant de donner les critères pratiques de stabilité, certains rappels d'algèbre linéaire sont nécessaires. La définition de plusieurs quantités relatives aux matrices sont données ci-après.

Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dans la suite, on notera $I_k$ la matrice identité de taille $k$, c'est à dire la matrice diagonale de taille $k \times k$ définie par:

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

**Définition 9** ***Déterminant d'une matrice:***
*Soit $a_{k,l}$ le coefficient de la matrice $A$ situé sur la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $l^{\text{ème}}$ colonne de $A$:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

*On note $A_{k,l}$ la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en enlevant à $A$ sa $k^{\text{ème}}$ ligne et sa $l^{\text{ème}}$ colonne:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

*Le déterminant de $A$, noté* $\det(A)$, *est la quantité définie par la récurrence suivante:*

- *si $n = 1$, $A = [a_{1,1}]$ et :*
$$\det(A) = a_{1,1}; \tag{15}$$

- *si $n > 1$:*
$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,l}(-1)^{k+l}\det(A_{k,l}), \tag{16}$$
*quelle que soit la valeur de $l$ choisie entre* 1 *et $n$.*

**Remarque 10** *D'après la définition précédente, le déterminant d'une matrice carrée $A$ de taille* $2\times 2$ *de la forme:*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \tag{17}$$

*est donné par:*

$$\det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma. \tag{18}$$

**Définition 11** ***Polynôme caractéristique de** $A$*
*La fonction:*

$$\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n) \tag{19}$$

*est un polynôme de degré $n$ en $\lambda$ appelé **polynôme caractéristique** de $A$ et noté $\mathcal{P}_A$.*

**Définition 12** ***Valeurs propres et spectre de** $A$*

- *On appelle **valeur propre** de la matrice $A$ toute racine du polynôme caractéristique de $A$. Plus précisément, $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de $A$ de multiplicité $m$ si:*
$$\det(A - \lambda I_n) = \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)^m P(\lambda), \tag{20}$$
*avec $P$ polynôme de degré $n - m$ tel que:*
$$P(\bar{\lambda}) = 0. \tag{21}$$

- *L'ensemble des valeurs propres de la matrice $A$ est appelé **spectre** de $A$ et est noté $Spec(A)$.*

**Remarque 13** *Les valeurs propres d'une matrice appartiennent à l'espace des complexes $\mathbb{C}$: elles peuvent donc être complexes, c'est à dire de la forme:*

$$\lambda_j = u_j + iv_j, \tag{22}$$

*où $u_j$ est la partie réelle de $\lambda_j$, qui est notée $\Re(\lambda_j)$, $v_j$ est la partie imaginaire de $\lambda_j$, qui est notée $\Im(\lambda_j)$, et $i$ est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Lorsque $\lambda_j$ est réelle, cela correspond simplement au cas particulier où $\Re(\lambda_j) = 0$.*

**Remarque 14** ***Valeurs propres de matrices particulières***

- ***Matrice diagonale**: Soit $A$ une matrice carrée diagonale de taille $n \times n$, c'est à dire une matrice de la forme (13) avec $a_{k,l} = 0, \forall k \neq l$:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & (0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (0) & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

  *Les valeurs propres de $A$ sont les valeurs des coefficients de la matrice situés sur la diagonal:*

$$Spec(A) = \{a_{k,k},\ k = 1:n\}. \tag{24}$$

- ***Matrice triangulaire**: Soit $A$ une matrice carrée triangulaire inférieure (respectivement supérieure) de taille $n \times n$, c'est à dire une matrice de la forme (13) avec $a_{k,l} = 0, \forall l > k$ (respectivement avec $a_{k,l} = 0, \forall l < k$):*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & (0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \left( \textit{respectivement } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (0) & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \right). \tag{25}$$

  *Les valeurs propres de $A$ sont les valeurs des coefficients de la matrice situés sur la diagonal:*

$$Spec(A) = \{a_{k,k},\ k = 1:n\}. \tag{26}$$

**Définition 15** ***Matrice inversible***

*Un matrice carrée $A$ de taille $n \times n$ es dite inversible, si il existe une matrice $B$ de taille $n \times n$ telle que:*

$$AB = BA = I_n. \tag{27}$$

*La matrice $B$ est appelée inverse de $A$ et est notée $A^{-1}$.*

**Définition 16** ***Matrice diagonalisable***

*Une matrice carrée $A$ de taille $n \times n$ est dite **diagonalisable** si il existe une matrice carrée $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible, d'inverse $P^{-1}$, et une matrice $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonale, telles que:*

$$A = PDP^{-1}. \tag{28}$$

*$P$ est appelée la **matrice de passage**.*

**Proposition 17** *Si $A$ est diagonalisable, alors:*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{29}$$

*où $\lambda_i$, $i = 1 : n$, sont les valeurs propres de $A$.*
*Si $\lambda_j$ est une valeur propre de $A$ de multiplicité $m_j$, alors:*

$$\underbrace{\lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+m_j-1}}_{m_j \text{ valeurs propres égales}}. \tag{30}$$

## 4.2 Cas particulier des systèmes linéaires

Les rappels étant faits, on s'intéresse maintenant au cas particulier des systèmes linéaires, pour lesquels on va exhiber une condition pratique simple permettant de vérifier la stabilité des points d'équilibre.

**Définition 18** ***Systèmes linéaires***
*Un système de la forme (7) est dit **linéaire**, si $f$ est de la forme:*

$$f(x) = Ax, \tag{31}$$

*où $A$ est une matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.*

### 4.2.1 En dimension $n = 1$

On s'intéresse dans un premier temps au système linéaire scalaire (c'est à dire de dimension $n = 1$):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & ax, \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{32}$$

où[2] $a \in \mathbb{R}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Un tel système admet un seul point d'équilibre $\bar{x} = 0$.

La solution de l'équation (32) est donnée par:

$$x(t) = x_0 e^{at}, \; \forall t \geqslant 0. \tag{33}$$

**Preuve.** $\forall t \geqslant 0$, on a $\dot{x} - ax = 0$. En multipliant l'équation par $e^{-at}$, on obtient alors, $\forall t \geqslant 0$:

$$e^{-at}\dot{x} - ae^{-at}x = 0 \Longleftrightarrow e^{-at}\frac{dx}{dt} + \frac{d(e^{-at})}{dt}x = 0 \Longleftrightarrow \frac{d(e^{-at}x)}{dt} = 0$$

En intégrant cette équation entre 0 et $t$, $\forall t \geqslant 0$, on obtient alors:

$$e^{-at}x(t) - e^{-a\times 0}x(0) = 0 \Longleftrightarrow x(t) = x_0 e^{at}.$$

[2] $\mathbb{R}^*$ représente l'ensemble des réels non nuls.

$\square$

Etudions la stabilité du point d'équilibre $\bar{x} = 0$.

**Stabilité simple au sens de Lyapunov**:
Soit $\delta$ tel que $|x_0 - \bar{x}| \leqslant \delta$, on a:

$$|x_0 - \bar{x}| = |x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t, x_0) - \bar{x}| = |x_0|e^{at} \leqslant \delta e^{at}. \tag{34}$$

Deux cas se distinguent alors selon que $a$ est de signe positif ou négatif. En effet, si $a > 0$ alors, plus $t$ sera grand, plus $e^{at}$ sera grand. Si au contraire $a < 0$, plus $t$ sera grand, plus $e^{at}$ sera proche de 0. On a donc:

- si $a < 0$:
$$|x_0 - \bar{x}| = |x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t, x_0) - \bar{x}| = |x_0|e^{at} \leqslant \delta e^{at} \leqslant \delta. \tag{35}$$
On a donc:
$$\forall \varepsilon,\ \exists \delta = \varepsilon \text{ tel que } |x_0 - \bar{x}| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t, x_0) - \bar{x}| \leqslant \varepsilon. \tag{36}$$
D'après la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est alors stable.

- si $a < 0$, alors:
$$\lim_{t \to \infty} |x_0|e^{at} = \infty, \tag{37}$$
d'où:
$$\forall \varepsilon,\ \forall x_0 \neq 0,\ \exists T > t_0 \text{ tel que } |x(t, x_0) - \bar{x}| = |x_0|e^{at} > \varepsilon,\ \forall t > T. \tag{38}$$
D'après la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est alors instable.

On montre donc que le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (32) est stable si et seulement si $a < 0$. Essayons d'affiner l'étude en nous intéressant à la stabilité asymptotique et exponentielle.

**Stabilité asymptotique**:
On se place dans le cas où $a < 0$. On a:

$$\forall x_0 \neq 0,\ \lim_{t \to \infty} |x(t) - \bar{x}| = \lim_{t \to \infty} |x_0 e^{at}| = 0. \tag{39}$$

Le point d'équilibre $\bar{x}$ est donc asymptotiquement stable.

**Stabilité exponentielle**:
On se place toujours dans le cas où $a < 0$. On a:

$$\forall x_0 \neq 0,\ |x(t, x_0) - \bar{x}| = |x_0|e^{at},\ \forall t \geqslant t_0. \tag{40}$$

Le point d'équilibre $\bar{x}$ est donc exponentiellement stable.

**Stabilité globale**
On se place toujours dans le cas où $a < 0$. Toutes les stabilités ont été vérifiées indépendamment de la valeur de la condition initiale. Par conséquent, le point d'équilibre $\bar{x}$ est globalement asympatotiquement et exponentiellement stable.

**Conclusion 19** *Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (32) est G.A.S et E.A.S si $a < 0$.*

Plus généralement, le coefficient $a$ peut être complexe. Dans ce cas, le même raisonnement que précédemment peut être effectué, à la seule différence que la valeur absolue d'un nombre réel est "remplacée" par le module d'un nombre complexe, qui est défini par:

$$|u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2}. \tag{41}$$

On a a alors en particulier $|e^{at}| = e^{\Re(a)t}$, et la condition de stabilité ne porte alors plus sur le signe de $a$ mais sur le signe de la partie réelle de $a$ (c'est à dire de $\Re(a)$). On a donc:

**Proposition 20** *Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (32) avec $a \in \mathbb{C}$ est G.A.S et E.A.S si $\Re(a) < 0$.*

**Remarque 21** *Ce résultat est une généralisation au cas où $a$ complexe, mais reste valable pour $a$ réel puisque, si $a$ réel, alors $\Re(a) = a$.*

#### 4.2.2 En dimension $n > 1$

On s'intéresse maintenant au cas plus général des systèmes linéaires de taille $n$, c'est à dire des systèmes de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax, \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{42}$$

où $A$ est une matrice carrée de taille $n \times n$ et[3] $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Supposons que la matrice $A$ est inversible et diagonalisable.

**Remarque 22** *Si $A$ est à la fois inversible et diagonalisable, alors elle n'admet aucune valeur propre nulle.*

Les points d'équilibre du système (42) sont les solutions de l'équation $Ax = 0$. Comme $A$ est inversible, la seule solution $\bar{x}$ de cette équation est:

$$\bar{x} = 0_n. \tag{43}$$

Etudions la stabilité de ce point d'équilibre. La matrice $A$ est diagonalisable; il existe donc une matrice de passage $P$ inversible telle que:

$$A = PDP^{-1}, \tag{44}$$

avec $D$ matrice diagonale définie par (29).

On a donc:

$$\dot{x} = Ax = PDP^{-1}x. \tag{45}$$

[3] $0_n$ désigne le vecteur nul, c'est à dire le vecteur $0_n = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n \text{ fois}}^T$.

En multipliant à gauche par $P^{-1}$, on obtient:

$$P^{-1}\dot{x} = DP^{-1}x. \tag{46}$$

Notons alors $y = P^{-1}x$. On a:

$$\begin{aligned} \dot{y} = Dy \quad &\Leftrightarrow \quad \dot{y}_i = \lambda_i y_i,\, \forall i = 1:n, &(47)\\ &\Leftrightarrow \quad y_i(t) = y_i(0)e^{\lambda_i t},\, \forall i = 1:n. &(48) \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\lim_{t\to\infty} |y_i(t)| = \lim_{t\to\infty} |y_i(0)|e^{\Re(\lambda_i)t} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Re(\lambda_i) < 0 \\ \infty & \text{si } \Re(\lambda_i) > 0. \end{cases} \tag{49}$$

**Proposition 23** *Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système linéaire (42) est G.A.S. et E.A.S. si toutes les valeurs propres de $A$ sont à partie réelle strictement négative.*

**Remarque 24** *Considérons le système linéaire plus général suivant:*

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(x - x_e), \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{50}$$

*où $x_e$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ constant. L'unique point d'équilibre $\bar{x}$ de ce système est égal à $x_e$. Si on effectue le changement de variable $y = x - x_e$, on obtient alors:*

$$\begin{cases} \dot{y} &= Ay, \\ y(0) &= x_0 - x_e, \end{cases} \tag{51}$$

*et on se ramène au système précédent (42).*

### 4.3 Cas des systèmes non linéaires

Plaçons nous maintenant dans le cas plus général des systèmes non linéaires autonomes de la forme (7). Pour étudier la stabilité de tels systèmes, on va se ramener au cas linéaire, par linéarisation autour d'un point d'équilibre du modèle considéré.

Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de (7), et $B$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée en $\bar{x}$. On suppose $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bar{B}$, c'est à dire dérivable par rapport à $x_i$ pour tout $i = 1:n$, et de dérivées partielles continues. La formule de Taylor à l'ordre 1 nous donne alors, pour tout $h$ tel que $\bar{x} + h \in B$:

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})h + R(h), \tag{52}$$

où $J_f(\bar{x})$ est la matrice jacobienne de $f$ en $\bar{x}$, c'est à dire la matrice:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1(\bar{x}) & \dots & \partial_{x_n} f_1(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n(\bar{x}) & \dots & \partial_{x_n} f_n(\bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{53}$$

et $R(h)$ est un "reste", qui est négligeable devant $\|h\|$, ce que l'on note également $R(h) = o(\|h\|)$, c'est à dire:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0. \tag{54}$$

Comme $f(\bar{x}) = 0$, et si l'on considère un $h$ suffisamment petit, on obtient alors l'approximation linéaire du système, aussi appelée **linéarisé** du système, donnée par:

$$\dot{h} \;\; = \;\; J_f(\bar{x})h. \tag{55}$$

**Définition 25** ***Point d'équilibre hyperbolique***
*Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système (7) est dit* ***hyperbolique*** *si $J_f(\bar{x})$ n'admet aucune valeur propre à partie réelle nulle (i.e. telle que $\Re(\lambda_j) = 0$).*
*Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit* ***non hyperbolique****.*

D'après le **théorème de Hartman-Grobman** (non mentionné ici), on sait que, si le point d'équilibre considéré est hyperbolique, les trajectoires solutions du système (7) et celles de son linéarisé sont qualitativement équivalentes autour du point d'équilibre, c'est à dire qu'elles ont la même allure. Etudier le comportement des trajectoires solution du linéarisé autour de son point d'équilibre $\bar{h} = 0$ permet donc d'étudier le comportement des trajectoires solution de (7) autour du point d'équilibre $\bar{x}$. Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $\bar{x}$ de (7), il "suffit" donc d'étudier la stabilité du point d'équilibre $\bar{h} = 0$ de son linéarisé. C'est ce qu'explique le théorème suivant:

**Theorem 26** ***Théorème de Lyapunov*** *( $1^{ère}$ méthode de Lyapunov)*
*Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre hyperbolique de (7).*

- *Si toutes les valeurs propres de $J_f(\bar{x})$ sont à partie réelle strictement positive (i.e. $\Re(\lambda_j) < 0$, $\forall j$), alors le point d'équilibre $\bar{x}$ est* ***localement exponentiellement stable****.*
- *Si $J_f(\bar{x})$ possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre $\bar{x}$ est* ***instable****.*

Ce théorème ne permet pas de conclure dans le cas de point d'équilibre non hyperbolique. Dans ce cas en effet, l'approximation obtenue par linéarisation n'est plus bonne, le reste $R$ n'étant plus négligeable. Pour obtenir une bonne approximation, il faudrait développer la formule de Taylor à l'ordre 2 et exprimer le terme en $h^2$. Cependant, l'approximation obtenue ne serait plus linéaire, et les outils précédents ne pourraient donc pas être utilisés.
Dans le cas de points d'équilibre non hyperboliques, on utilisera donc la $2^{\text{ème}}$ **méthode de Lyapunov** (non mentionnée ici), basée sur la généralisation de la notion d'énergie.

# 5 Comportement des trajectoires dans le cas de systèmes linéaires de taille $n = 2$

On considère un système linéaire de taille $n = 2$ de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A(x - x_e), \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{56}$$

où $x_e$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, et $A$ est une matrice carrée, de taille $2 \times 2$ et à coefficients réels, c'est à dire de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \tag{57}$$

avec $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ dans $\mathbb{R}$. On suppose dans la suite que $A$ possède deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

## 5.1 Critère de stabilité

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $\bar{x} = x_e$ de (42), il faut pouvoir conclure sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de $A$. Cependant, il n'est pas nécessaire de connaitre explicitement ces valeurs propres. Un critère est proposé ci-dessous, permettant de conclure quant à la stabilité du point d'équilibre $\bar{x} = x_e$ sans calcul explicite des valeurs propres de $A$.

**Proposition 27** *Le point d'équilibre $\bar{x}x_e$ de (57) est stable si et seulement si:*

$$\det(A) > 0 \ \textit{et}\ Tr(A) < 0, \tag{58}$$

*où $Tr(A)$ est la trace de la matrice $A$, c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux.*

**Preuve.** Dans le cas d'une matrice de la forme de $A$, on a:

$$Tr(A) = \alpha + \delta. \tag{59}$$

Le déterminant d'une matrice de la forme de $A$ est quant à lui défini par:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta. \tag{60}$$

Le polynôme caractéristique de $A$ peut lui aussi se calculer d'après cette formule. On a:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{bmatrix} = (\alpha - \lambda)(\delta - \lambda) - \gamma\beta && (61) \\ &= \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \gamma\beta = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A). && (62) \end{aligned}$$

Les deus valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de $A$ sont les racines du polynôme caractéristique de $A$. Celui-ci s'écrit donc sous la forme:

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = K(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = K\lambda^2 - K(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + K\lambda_1\lambda_2. \tag{63}$$

Les polynômes (62) et (63) devant être égaux, on obtient, par identification des coefficients:

$$\begin{aligned} K &= 1, && (64)\\ Tr(A) &= \lambda_1 + \lambda_2, && (65)\\ \det(A) &= \lambda_1\lambda_2. && (66) \end{aligned}$$

Les coefficients de la matrice $A$ étant réels, on sait que les valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont soit toutes les deux réelles, soit complexes conuguées, c'est à dire de la forme:

$$\lambda_1 = u + iv \text{ et } \lambda_2 = u - iv. \tag{67}$$

- Cas où $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:
  On a alors:

  $$\bar{x} \text{ stable} \Leftrightarrow \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 > 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \tag{68}$$

  et

  $$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 > 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 < 0 &\Rightarrow \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ de même signe, et } \lambda_1 + \lambda_2 < 0 && (69)\\ &\Rightarrow \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \bar{x} \text{ stable.} && (70) \end{aligned}$$

  D'où l'équivalence:

  $$\bar{x} \text{ stable} \Leftrightarrow \det(A) > 0 \text{ et } Tr(A) < 0. \tag{71}$$

- Cas où $\lambda_1 = u + iv$ et $\lambda_2 = u - iv$:
  On a alors $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 = u^2 + v^2 > 0$ quel que soit le signe de $u$ et de $v$, et:

  $$\bar{x} \text{ stable} \Leftrightarrow u < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 2u < 0 \Leftrightarrow Tr(A) < 0. \tag{72}$$

□

Dans le cas où $n = 2$, pour vérifier si l'état d'équilibre $\bar{x} = x_e$ de (57) est bien stable, il suffit donc de calculer le déterminant et la trace de la matrice $A$. Le calcul des valeurs propres de $A$ n'est pas nécessaire pour cela.